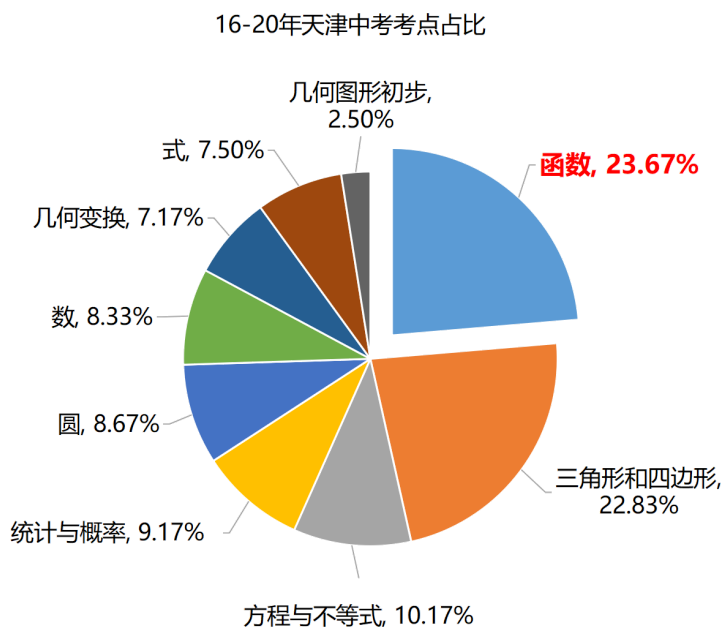


第1讲二次函数与面积问题

《二次函数代几综合之最值、定值问题》是《函数基础》、《二次函数提高》的后续模块，常以25题的形式出现在模考和中考中，难度偏高，题目的综合性较强，需要学生有一定的知识储备，构建一定的知识体系，熟练掌握各模型，以及各类题目的解题技巧。

本模块侧重于二次函数的代几综合，难度较大，适用于二次函数综合的查漏补缺，最值、定值问题的短期突破。本模块分为二次函数与面积问题、二次函数与线段和差最值、二次函数与定值问题3讲内容，配套练习进一步巩固所学内容，专项练习，巩固重难点。

知己知彼



年份	分值	占比	题号	知识点
2020	10	8%	25	最值问题
2019	10	8%	25	最值问题
2018	10	8%	25	存在性问题
2017	10	8%	25	最值问题
2016	10	8%	25	定值问题

一、由坐标求面积

1. 公式法

典题精练

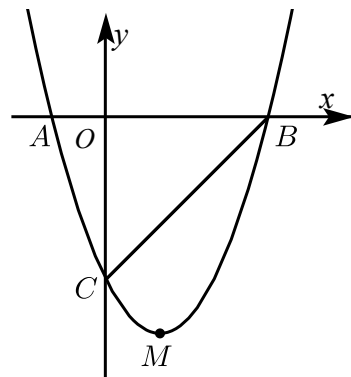
1. 如图，抛物线的顶点坐标是 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{8}\right)$ ，且经过点 $A(8, 14)$ 。
 - (1) 求该抛物线的解析式。
 - (2) 设该抛物线与 y 轴交于点 B ，与 x 轴相交于 C 、 D 两点(点 C 在点 D 的左边)，试求 $\triangle BCD$ 的面积。

2. 已知抛物线 $y = mx^2 + (1 - 2m)x + 1 - 3m$ 与 x 轴相交于不同的两点 A 、 B 。
 - (1) 求 m 的取值范围。
 - (2) 证明该抛物线一定经过非坐标轴上的一点 P ，并求出点 P 的坐标。
 - (3) 当 $\frac{1}{4} < m \leq 8$ 时，由(2)求出的点 P 和点 A 、 B 构成的 $\triangle ABP$ 的面积是否有最值？若有，求出该最值及相对应的 m 值。

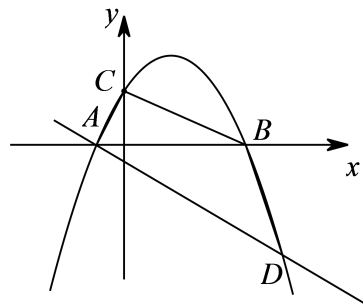
2. 割补法

典题精练

3. 如图，在平面直角坐标系 XOY 中，抛物线 $y = x^2 - 2x + k$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于点 $C(0, -3)$ ，顶点为 M ．则四边形 $OBMC$ 的面积为（ ）．

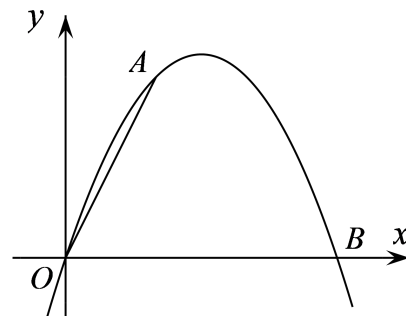


- A. 6.5 B. 7.5 C. 8.5 D. 9.5
4. 如图，已知抛物线 M 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$ 、 B 两点，与 y 轴交于 $C(0, 2)$ 点，抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$ ，连接 AC ．



- (1) 求抛物线 M 的解析式．
- (2) 判断 $\triangle ACB$ 的形状，并说明理由．
- (3) 过点 A 作 BC 的平行线，交抛物线 M 于另一点 D ，连接 BD ．试求出四边形 $ADBC$ 的面积．

5. 如图，二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图像经过点 $A(2, 4)$ 与 $B(6, 0)$ 。



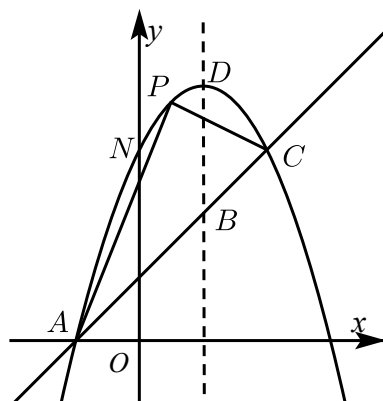
(1) 求 a, b 的值。

(2) 点 C 是该二次函数图像上 A, B 两点之间的一动点，横坐标为 $x(2 < x < 6)$ ，写出四边形 $OACB$ 的面积 S 关于点 C 的横坐标 x 的函数表达式，并求 S 的最大值。

3. 铅锤法

典题精练

6. 如图，已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与一直线相交于 $A(-1, 0)$ 、 $C(2, 3)$ 两点，与 y 轴交于点 N ，其顶点为 D 。

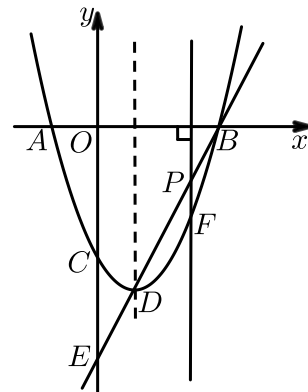


- (1) 求抛物线及直线 AC 的函数关系式。
- (2) 若 P 是抛物线上位于直线 AC 上方的一个动点，求 $\triangle APC$ 的面积的最大值及此时点 P 的坐标。

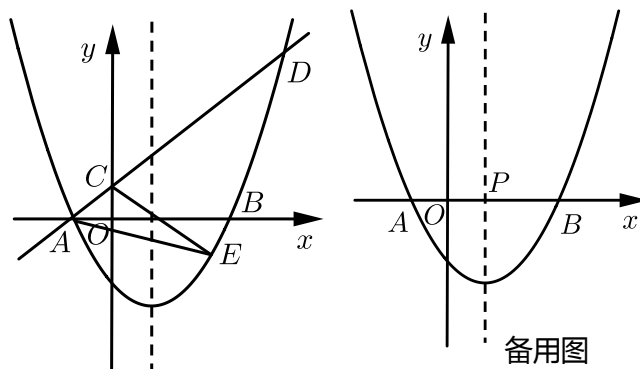
7. 抛物线 $y = x^2 - bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D , 直线 BD 与 y 轴交于点 E .

(1) 求顶点 D 的坐标 .

(2) 如图 , 设点 P 为线段 BD 上一动点 (点 P 不于点 B 、 D 重合) , 过点 P 作 x 轴的垂线与抛物线交于点 F . 求 $\triangle BDF$ 的面积最大值 .



8. 在平面直角坐标系中，将二次函数 $y = ax^2 (a > 0)$ 的图象向右平移1个单位，再向下平移2个单位，得到如图所示的抛物线，该抛物线与 x 轴交于点 A 、 B （点 A 在点 B 的左侧）， $OA = 1$ ，经过点 A 的一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象与 y 轴正半轴交于点 C ，且与抛物线的另一个交点为 D ， $\triangle ABD$ 的面积为5.



- (1) 求抛物线和一次函数的解析式.
- (2) 抛物线上的动点 E 在一次函数的图象下方，求 $\triangle ACE$ 面积的最大值，并求出此时点 E 的坐标.

9. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $A(-6, 0)$ ， $B(2, 0)$ ， $C(0, -3)$.

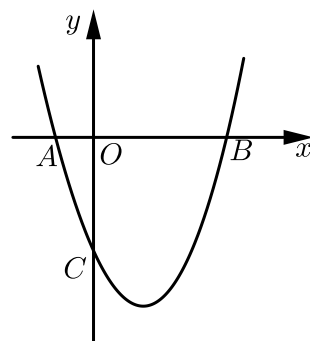
- (1) 求此抛物线的解析式.
- (2) 若点 H 是该抛物线第三象限的任意一点，求四边形 $OCHA$ 的最大面积.

二、由面积求坐标

1. 面积定值

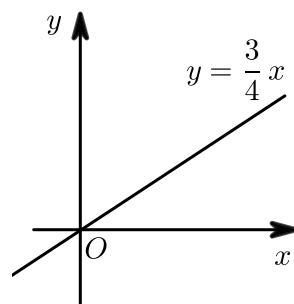
典题精练

10. 如图，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ 两点。



- (1) 求该抛物线的解析式。
- (2) 求该抛物线的对称轴以及顶点坐标。
- (3) 设(1)中的抛物线上有一个动点 P ，当点 P 在该抛物线上滑动到什么位置时，满足 $S_{\triangle PAB} = 8$ ，并求出此时 P 点的坐标。

11. 一次函数 $y = \frac{3}{4}x$ 的图象如图所示，它与二次函数 $y = ax^2 - 4ax + c$ 的图象交于 A 、 B 两点（其中点 A 在点 B 的左侧），与这个二次函数图象的对称轴交于点 C 。

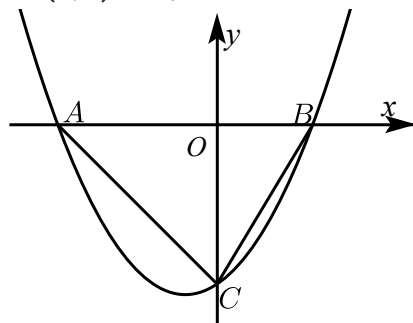


- (1) 求点 C 的坐标.
- (2) 设二次函数图象的顶点为 D .
- ① 若点 D 与点 C 关于 x 轴对称，且 $\triangle ACD$ 的面积等于3，求此二次函数的关系式.
- ② 若 $CD = AC$ ，且 $\triangle ACD$ 的面积等于10，求此二次函数的关系式 .

2. 面积相等

典题精练

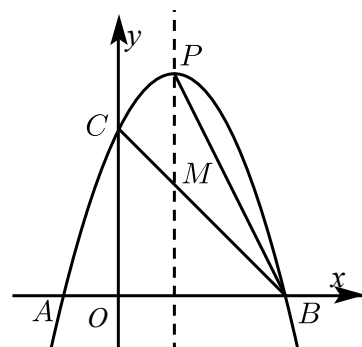
12. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx - 5$ ($a \neq 0$)与 x 轴交于点 $A(-5, 0)$ 和点 $B(3, 0)$ ，与 y 轴交于点 C 。



(1) 求该抛物线的解析式及顶点坐标。

(2) 若点 E 为 x 轴下方抛物线上的一动点，当 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABC}$ 时，求点 E 的坐标。

13. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 三点，对称轴与抛物线相交于点 P ，与直线 BC 相交于点 M ，连接 PB 。



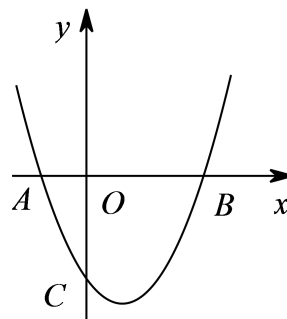
- (1) 求该抛物线的解析式。
- (2) 抛物线上是否存在一点 Q (不与点 P 重合)，使 $\triangle QMB$ 与 $\triangle PMB$ 的面积相等，若存在，求点 Q 的横坐标；若不存在，说明理由。

3. 面积成比例

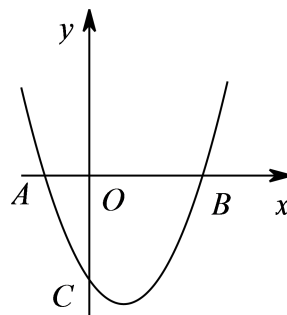
典题精练

14. 在平面直角坐标系中, O 为原点, 抛物线 $y = ax^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x (a \neq 0)$ 经过点 $A(\sqrt{3}, -3)$, 对称轴为直线 l , 点 O 关于直线 l 的对称点为点 B . 过点 A 作直线 $AC \parallel x$ 轴, 交 y 轴于点 C .
- (1) 求该抛物线的解析式及对称轴.
- (2) 抛物线上是否存在点 Q , 使得 $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{3}S_{\triangle AOQ}$, 若存在, 求出点 Q 的坐标, 若不存在, 请说明理由.
15. 已知抛物线 $l: y = \frac{1}{2}(x-h)^2 - 2$ 与 x 轴交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 将抛物线 l 在 x 轴下方部分沿 x 轴翻折, x 轴上方的图象保持不变, 就组成了函数 f 的图象.
- (1) 若点 A 的坐标为 $(1, 0)$.
- ① 求抛物线 l 的解析式.
- ② 直接写出当 x 为何值时, 函数 f 的值 y 随 x 的增大而增大.
- ③ 过 A 点的直线交函数 f 的图象交于另外两点 P, Q , 且 $S_{\triangle ABQ} = 2S_{\triangle ABP}$, 求 P 的坐标.
- (2) 当 $2 < x < 3$ 时, 若函数 f 的值随 x 的增大而增大, 直接写出 h 的取值范围.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A, B （ A 在 B 的左侧），抛物线的对称轴为直线 $x = 1$ ， $AB = 4$ ．



- (1) 求抛物线的表达式．
- (2) 抛物线上有两点 $M(x_1, y_1)$ 和 $N(x_2, y_2)$ ，若 $x_1 < 1$ ， $x_2 > 1$ ， $x_1 + x_2 > 2$ ，试判断 y_1 与 y_2 的大小，并说明理由．
- (3) 平移该抛物线，使平移后的抛物线经过点 O ，且与 x 轴交于点 D ，记平移后的抛物线顶点为 P ，当 $\triangle ODP$ 是等腰直角三角形时，直线 $x = m(0 < m < 3)$ 分别交线段 BP, BC 于点 E, F ，且 $\triangle BEF$ 的面积： $\triangle BPC$ 的面积 $= 2 : 3$ ，求 m 的值．

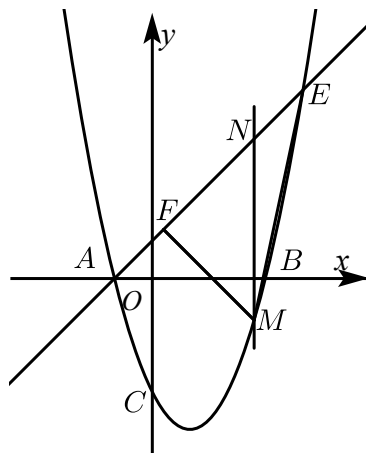


备用图

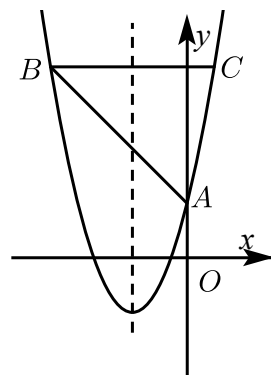
4. 比例分割

典题精练

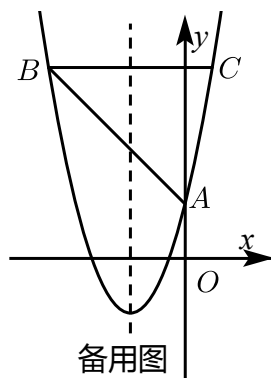
17. 如图，平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 交 x 轴于 A 、 B 两点（点 A 在点 B 的左侧），交 y 轴于点 C 。点 $E(4, 5)$ ，连接 AE ，点 M 是抛物线上位于直线 AE 下方的一点，过点 M 作 $MF \perp AE$ 于点 F ，连接 ME ，作 $MN \parallel y$ 轴，交直线 AE 于点 N ，若 MN 将 $\triangle EFM$ 的面积分成 $2:3$ 两部分，请确定 M 点的坐标。



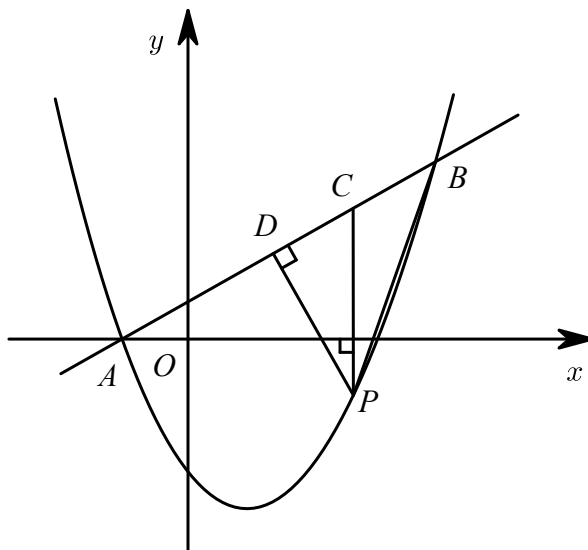
18. 如图，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 y 轴交于点 $A(0, 2)$ ，对称轴为直线 $x = -2$ ，平行于 x 轴的直线与抛物线交于 B 、 C 两点，点 B 在对称轴左侧， $BC = 6$ 。



- (1) 求此抛物线的解析式 .
- (2) 若过点 C 的直线 l 将 $\triangle ABC$ 的面积分成 $2 : 3$ 两部分，试求直线 l 的解析式 .



19. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 交于 A, B 两点，点 A 在 x 轴上，点 B 的纵坐标为3. 点 P 是直线 AB 下方的抛物线上一动点（不与点 A, B 重合），过点 P 作 x 轴的垂线交直线 AB 于点 C ，作 $PD \perp AB$ 于点 D .



- (1) 求 a, b 及 $\sin \angle ACP$ 的值 .
- (2) ①设点 P 的横坐标为 m . 用含 m 的代数式表示线段 PD 的长，并求出线段 PD 长的最大值；
- ②连接 PB ，线段 PC 把 $\triangle PDB$ 分成两个三角形，是否存在适合的 m 值，使这两个三角形的面积之比为9 : 10？若存在，直接写出 m 的值；若不存在，说明理由 .

5. 相似三角形

典题精练

20. 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 y 轴交于点 $C(0, -4)$ ，与 x 轴交于点 A, B ，且 $B(2, 0)$ 。

(1) 求该抛物线的解析式。

(2) 若点 P 是线段 AB 上的一动点，过点 P 作 $PE \parallel AC$ ，交 BC 于点 E ，连接 CP ，求 $\triangle PCE$ 面积的最大值。

21. 如图，已知二次函数 $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$ 的图象与 x 轴交于点 $B(-2, 0)$ ，点 $C(8, 0)$ ，与 y 轴交于点 A 。连接 AC 、 AB ，若点 N 在线段 BC 上运动（不与点 B 、 C 重合），过点 N 作 $NM \parallel AC$ ，交 AB 于点 M ，当 $\triangle AMN$ 面积最大时，求 N 点的坐标。

